



Universität Stuttgart
Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Frank Allgöwer

Musterklausur Konzepte der Regelungstechnik, 29. Februar 2012

Die Klausur umfasst **11 Seiten** (10 Aufgaben, 56 Punkte).

Name, Vorname: _____

Antworten ohne Begründung werden nicht akzeptiert. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass eine Musterklausur keineswegs dafür gedacht ist, alle Themenbereiche der Vorlesung abzudecken.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$.

Ist das System steuerbar? Wenn nein, ist es stabilisierbar?

Ist das System beobachtbar? Wenn nein, ist es entdeckbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u(x)$ und einen Anfangswert $x_0 = x(t = 0) \neq 0$ so, dass der Ausgang identisch verschwindet, d.h. $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Nulldynamik des offenen Kreises und analysieren Sie deren Stabilität. (1 Punkt)
- c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik des geschlossenen Regelkreises mit der aus Teilaufgabe a) bestimmten Zustandsrückführung. (1 Punkt)

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \alpha x_1 - (x_1 + x_2)^2 x_2,\end{aligned}$$

wobei $x = (x_1 \ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein konstanter Parameter ist.

- a) Für welche positiven Konstanten α ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil. Verwenden Sie zur Beantwortung dieser Frage, die Linearisierungsmethode von Ljapunow. (2 Punkte)

- b) Zeigen Sie mit Hilfe der Ljapunow Funktion

$$V(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2$$

und mit Hilfe des LaSalle' schen Invarianzprinzips, dass die Ruhelage 0 global asymptotisch stabil ist für $\alpha > 0$. (4 Punkte)

- c) Ist die Ruhelage 0 für $\alpha = 0$ global asymptotisch stabil? Geben Sie eine Begründung an. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sei ein System der Form

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass globale asymptotische Stabilität der Ruhelage 0 gewöhnlich mit Hilfe der Direkten Methode von Ljapunow nachgewiesen wird. Ein unbekannter Systemtheoretiker behauptet nun ganz frech, eine neue wunderbare Alternative zur Ljapunowschen Stabilitätstheorie gefunden zu haben. Er schlägt folgenden Stabilitätssatz in seinen wissenschaftlichen Arbeiten vor:

Satz 1 *Das System $\dot{x} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ ist global asymptotisch stabil, falls eine radial unbeschränkte, differenzierbare Funktion W existiert, die folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$\begin{aligned} W(x) &< 0 \\ L_f W^2(x) &< 0 \end{aligned}$$

für alle von Null verschiedenen $x \in \mathbb{R}^n$, das heißt $W(x)$ und $L_f W^2(x)$ sind negativ definite Funktionen.

Sie glauben aber nicht so recht an diese sogenannte „neue wunderbare Alternative“. Viel eher ist zu vermuten, dass entweder (i) Satz 1 mit Hilfe der Ljapunowschen Stabilitätstheorie einfach hergeleitet werden kann, oder

(ii) Satz 1 falsch ist.

Welche der oben genannten Behauptungen trifft zu? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3^3 \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad des nichtlinearen Systems. (1 Punkt)
- b) Ist das nichtlineare System minimalphasig? (2 Punkte)
- c) Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_2 &= \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \eta &= x_3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie ϕ_1 und ϕ_2 so, dass das transformierte System in Byrnes-Isidori-Normalform vorliegt. (2 Punkte)

- d) Ist die in Teilaufgabe c) berechnete Koordinatentransformation ein globaler Diffeomorphismus? Geben Sie eine Begründung an. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Byrnes-Isidori-Normalform für das nichtlineare System an. (2 Punkte)
- f) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u(x) = k(x)$ mit $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ für das nichtlineare System so, dass das nichtlineare System das Ein- /Ausgangsverhalten

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

besitzt. Geben Sie die Zustandsrückführung in x -Koordinaten an. (2 Punkte)

- g) Entwerfen Sie einen Regler $u(x, t) = k(x, t)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ für das nichtlineare System so, dass der Ausgang y einem sinusförmigen Referenzsignal y_{ref} für hinreichend große Zeiten folgt, d.h. $y(t) \rightarrow y_{ref} = \sin(t)$ für $t \rightarrow \infty$. Geben Sie den Regler in x -Koordinaten an. (3 Punkte)

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Kann für das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

ein stabilisierender LQ-Regler entworfen werden, der das Gütekriterium

$$J(\mathbf{x}_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u^2(t)) dt$$

minimiert? Geben Sie eine kurze Begründung an?

(2 Punkte)

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Das skalare System

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

soll durch einen LQ-Regler bezüglich des Gütekriteriums

$$J(x_0, u(\cdot)) = \int_0^2 (4x^2(t) + 4u^2(t)) dt$$

optimal geregelt werden. Die vier unten gezeigten Abbildungen zeigen mögliche Lösungen $P_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ der Riccati-Differentialgleichung des oben gegebenen LQR-Problems. Geben Sie für jedes $P_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ an, ob dies eine mögliche Lösung des oben gegebenen LQR-Problems ist oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (2 Punkte)

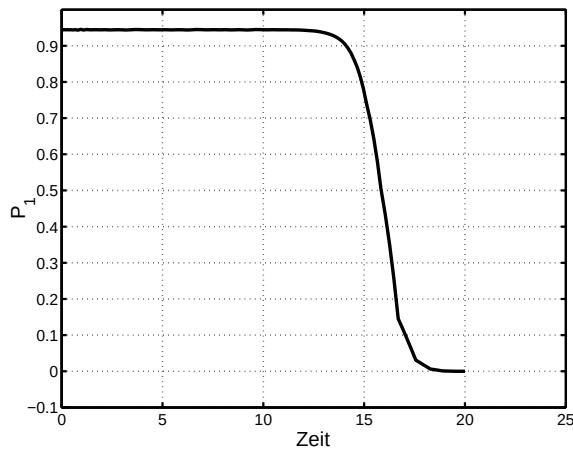


Abbildung 1: Mögliche Lösung P_1 .

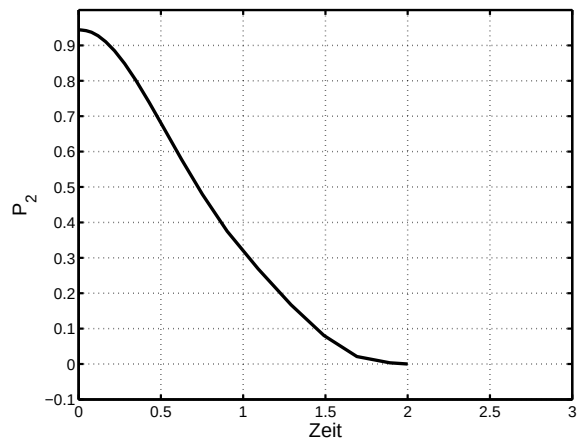


Abbildung 2: Mögliche Lösung P_2 .

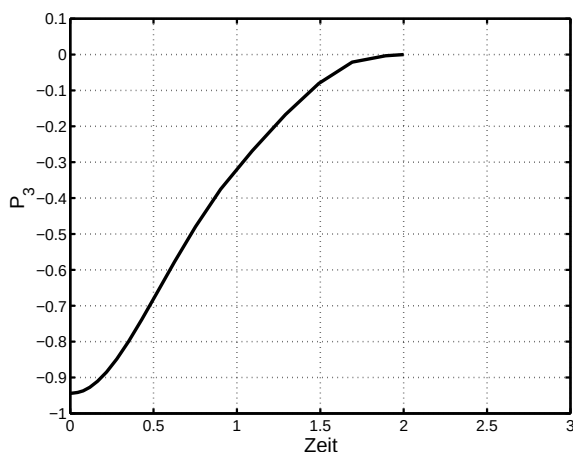


Abbildung 3: Mögliche Lösung P_3 .

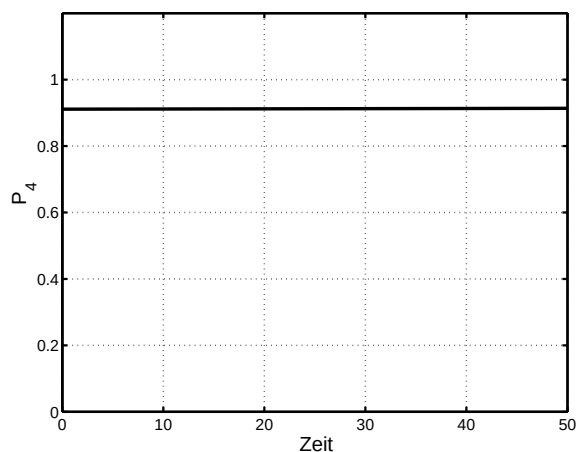


Abbildung 4: Mögliche Lösung P_4 .

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Für das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

soll ein LQ-Regler bezüglich des Gütekriteriums

$$J(\mathbf{x}_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + u^2(t)) \, dt$$

entworfen werden. Die Lösung der Riccati-Gleichung ist:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die optimale Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie für $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$ den minimalen Wert J_{opt} des Gütekriteriums. (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Gewichtsmatrix Q des oben gegebenen LQR-Problems. (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie mittels Rechnung, dass die Funktion $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ eine Ljapunowfunktion für den geschlossenen Regelkreises ist. (3 Punkte)

Aufgabe 9 (5 Punkte) Zu den folgende Aussagen ist anzugeben, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, ausführliche mathematische oder formelle Begründungen werden nicht erwartet. Aussagen ohne Begründung werden nicht gewertet.

- a) Wenn ein lineares zeitinvariantes System steuerbar ist, dann können die Nullstellen des geschlossenen Kreises durch eine Ausgangsrückführung an beliebige Stellen gelegt werden. (1 Punkt)

- b) Die Matrizenungleichung

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & C^T \\ 0 & (\gamma^2 - \mu)I & D^T \\ C & D & I \end{bmatrix} > 0,$$

mit den unbekannten Parametern X , μ , und γ^2 , stellt eine lineare Matrizenungleichung (LMI) dar. (1 Punkt)

- c) Die $\mathcal{L}_2$ -Norm des Zeitsignals $f(t) = 9e^{-0.5t}$ ist endlich. (1 Punkt)
- d) Für instabile Systeme $G(s)$ gilt auch $\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$. (2 Punkte)

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Gegeben sei der Regelkreis in Abb. 5 mit den bekannten Übertragungsmatrizen $G_1(s)$ und $G_2(s)$. Der Regler $K(s)$ sei als nominell stabilisierend angenommen. Für die als stabil angenommene Unsicherheit Δ gelte zunächst $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Alle betrachteten Übertragungsfunktionen seien SISO-Systeme.

- Das betrachtete Problem soll in die Standard- M - Δ -Struktur umgewandelt werden. Leiten Sie die Übertragungsmatrix $M(s)$ her. (2 Punkte)
- Anstatt Δ wird nun eine Unsicherheit $\bar{\Delta}(s) = W(s)\Delta(s)$ betrachtet ($W(s)$ wird ebenfalls als stabil angenommen). Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für robuste Stabilität des geschlossenen Kreises gegenüber der betrachteten Unsicherheitsklasse an. (1 Punkt)
- Es sei jetzt $W(s) = 3$, $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ und $K \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wertebereich von K , so dass der geschlossene Kreis robust stabil gegenüber der betrachteten Unsicherheitsklasse ist. (3 Punkte)

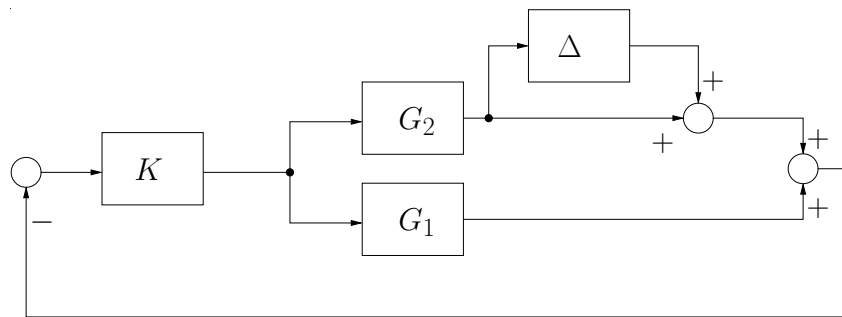


Abbildung 5: Zu Aufgabe 10.